Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche
Vol. XVII (1997) fasc. 1

Sulla posizione della "formula di Erone" nei *Metrica* (con una nota platonica)

Jens Høyrup*

In memoriam
Olaf Schmidt

La "formula di Erone" per l'area di un triangolo viene introdotta due volte nelle *Opera omnia*: una volta in *Metrica* 1.7-8, l'altra in *Dioptra* 31 [ed. Schöne 1903: 16-24, 280-284]. Al suo tempo, Hultsch ebbe dei dubbi sull'autenticità della seconda versione, dubbi che però sembrano infondati, come dimostra Schöne [1903: pag. xix-xx]. Già un'analisi non troppo approfondita fa scoprire, invece, che la prima versione ha una relazione obliqua con i passi del testo che le stanno intorno.

I capitoli 5 e 6 di *Metrica* I trattano di triangoli scaleni, il quinto gli acutangoli, il sesto gli ottusangoli. Il loro metodo consiste nel trovare dapprima la proiezione di un lato sulla base (utilizzando *Elementi* II.13 e II.12, rispettivamente), e poi l'altezza corrispondente tramite il teorema di Pitagora. Alla fine del capitolo 6 (in un passo che indicheremo con 6A) viene detto che fin qui i risultati sono stati trovati tramite operazioni di calcolo (*ἐπιλογίζομαι*), mentre in quello che segue verranno ottenuti per mezzo dell'analisi (*κατὰ ἀνάλυσιν*). A questo primo preambolo alla presentazione della formula segue nel capitolo 7 il lemma che il "lato" (la radice quadrata) del prodotto dei quadrati sui segmenti AB e BΓ è uguale al rettangolo contenuto dagli stessi segmenti; in simboli, $\sqrt{\square(AB)\cdot\square(B\Gamma)} = \square(AB, B\Gamma)$[1]. La dimostrazione utilizza la

* Sezione di filosofia e teoria della scienza, Università di Roskilde, Danimarca. Ringrazio Lene Waage Petersen per la correzione linguistica, ed Enrico Giusti per gli ultimi ritocchi. È ovvio che solo io sono responsabile degli errori e delle frasi inadatte che restano.

[1] Il testo parla di AB e BΓ come numeri, ma molto nel vocabolario resta geometrico, come restano naturalmente gometriche le entità che entrano nella formula. Può essere vero in generale che i matematici greci distinguevano bene fra numeri e segmenti, e che perciò una lettura aritmetico-algebrica per esempio di Apollonio sia illecita, come affermato con enfasi da Unguru & Rowe [1981]; anche Erone sa che conviene rispettare questa distinzione, e deve essere esatta-

tecnica delle proporzioni, dimostrando che $AB : B\Gamma$ è uguale sia a $\square(AB) : \boxed{}(AB\Gamma)$ che a $\boxed{}(AB\Gamma) : \square(B\Gamma)$, e che $\boxed{}(AB\Gamma)$ è dunque media proporzionale fra $\square(AB)$ e $\square(B\Gamma)$. Di conseguenza, $\boxed{}(AB\Gamma) \cdot \boxed{}(AB\Gamma) = \square(AB) \cdot \square(B\Gamma)$, e dunque $\boxed{}(AB\Gamma) = \sqrt{\square(AB) \cdot \square(B\Gamma)}$.

Il capitolo 8 comincia con un secondo preambolo: "C'è però un metodo generale che permette, se sono dati i tre lati, di trovare l'area di qualunque triangolo senza la perpendicolare"[2]. Segue un esempio numerico, con i lati di 7, 8 e 9 unità (e dunque area $\sqrt{720}$, che Erone insegna a calcolare con precisione arbitraria), e una dimostrazione geometrica, che comincia con un terzo preambolo:

> La dimostrazione geometrica di quello è la seguente: Quando i lati di un triangolo sono dati, trovare l'area. È certo possibile, se si tira la perpendicolare e ci si procura la sua grandezza, trovare l'area del triangolo; ci si deve invece procurare l'area senza la perpendicolare.

Il capitolo 8 si chiude con un'altro esempio numerico, questa volta con lati di 12,13 e 15 unità, – e la prima frase del capitolo 9 dice che "dopo aver dunque imparato a trovare l'area di un triangolo i cui lati sono dati, quando la perpendicolare è razionale", bisogna trovarla nel caso in cui essa sia irrazionale. A questo punto il testo continua esattamente dove finisce il capitolo 6 vero e proprio, come se né il "primo preambolo" 6A, né i capitoli 7 e 8 fossero presenti.

Tutto il brano 6A+7+8 è dunque in qualche modo un'interpolazione; la struttura interna del passo, con tre preamboli, suggerisce inoltre che non si tratta di un'interpolazione semplice.

Un confronto con *Dioptra* 20 è rivelatore. Questo comincia in maniera assolutamente identica ai *Metrica*:

> Quando i lati di un triangolo sono dati, trovare l'area. È certo possibile, se si tira la perpendicolare e ci si procura la sua grandezza, trovare l'area del triangolo; ci si deve invece procurare l'area senza la perpendicolare.

---

mente per questa ragione che parla di numeri, nonostante che nella dimostrazione che segue siano segmenti. Ma non riesce, né qui né altrove, a mantenere la distinzione; in III.20 diventa particolarmente ovvio che non fa differenza fra operazioni aritmetiche ed operazioni geometriche: omette nel calcolo un fattore 1 (la "distanza" fra 4 e 5), col risultato che deve addizionare grandezze di dimensioni differenti. La distinzione precisa fatta fra geometria ed aritmetica nella geometria greca non è la conseguenza di una mancata comprensione della possibilità di esprimere le operazioni aritmetiche in modo geometrico; è il risultato di un purismo teorico e filosofico. In un contesto come quello dei *Metrica*, tale purismo diventa troppo ingombrante; Erone, come già gli scribi babilonesi, vede gli oggetti della sua geometrica in modo "moderno", come segmenti, aree e volumi misurabili e, regolarmente, già misurati.

[2] Questa traduzione, come tutte quelle che seguono, è dovuta a chi scrive, ma con un occhio alla traduzione tedesca di Schöne.

Anche in greco i due testi sono identici, lettera per lettera; ma quello che nei *Metrica* è un terzo preambolo, e dunque fuori luogo, nella *Dioptra* è una spiegazione del tutto appropriata.

Anche le due dimostrazioni sono pressoché identiche; rispetto alla versione della *Dioptra*, quella dei *Metrica* aggiunge qualche nota esplicativa; quando l'ordine delle lettere che designano un segmento non è alfabetico nella *Dioptra*, viene spesso invertito (occasionalmente anche quando è già alfabetico). Non c'è dubbio che uno dei testi è stato copiato dall'altro, o che ambedue seguono un modello comune; la natura delle differenze indica che la versione della *Dioptra* è, se non necessariamente quella originale, almeno molto più vicina ad essa che non quella dei *Metrica*. Questa osservazione si accorda bene con la conclusione che deriva dal passo iniziale, fuori luogo nei *Metrica* ma funzionale nella *Dioptra*.

Dioptra 20 termina con un esempio numerico; lo stesso che nei *Metrica*. Anche lì è ovvio che il passo dei *Metrica* è copiato con ritocchi di stile, o dalla *Dioptra* stessa, o da un originale a cui la *Dioptra* è vicinissima. Fra i ritocchi, uno è notevole: nella *Dioptra*, i lati non sono 13, 14 e 15 unità (*μονάδες*) ma 13, 14 e 15 *parti* (*μοῖραι*).

Non meno interessante del confronto con *Dioptra* 20 è quello con *Metrica* I.27-29,32. I.27 (che riguarda la somma di una proporzione continua con rapporto 4:1) viene presentato come un preliminare alla misura dei segmenti circolari; la stessa caratterizzazione vale per 1.28-29, che considerano prependicolari e triangoli inscritti in segmenti circolari.

Dopo questi preliminari, il capitolo 30 comincia in un modo del tutto indipendente: "È vero che gli antichi trascuravano la misura dei segmenti circolari", cioè che calcolavano l'area come $\frac{c+f}{2} \cdot f$ (c è la corda, f la freccia). L'autore propone che la formula sia dovuta a coloro che assumevano che la periferia contenga il triplo del diametro, poiché con questa ipotesi la formula diventa esatta per il semicerchio. Il capitolo 31 continua poi presentando la formula di quelli che invece hanno fatto "indagini più precise"[3], ossia $\frac{c+f}{2} \cdot f + \frac{1}{14}\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Questa formula viene ascritta a coloro che assumevano che la periferia fosse "il triplo del diametro, e la settima parte in più" – ancora una volta perché le due formule si accordano nel caso del semicerchio.

Alla fine del capitolo 31 si trova l'osservazione ("31A") che questa formula presunta più precisa non deve essere adoperata se $c > 3f$, e viene dimostrato che per segmenti troppo piccoli dà risultati assurdi. In tali casi bisogna invece "servirsi dell'approccio seguente": quello insegnato nel capitolo 32.

[3] Il contrasto a cui accenna il *μὲν* ("è vero") del capitolo 30 è dunque quello fra gli "antichi" e questo gruppo, non fra la formula trascurata degli antichi e quella archimedea preparata in I.27-29.

Lì si dimostra, con l'aiuto dei preliminari, che l'area di un segmento circolare è più grande di $1\frac{1}{3}$ volte l'area del triangolo con la stessa base e la stessa altezza (vale a dire, come viene spiegato con riferimento a Archimede, più grande del segmento di parabola corrispondente); limite che per i segmenti circolari con corda più grande del triplo della freccia viene raccomandato come approssimazione all'area.

Il capitolo 33 tratta di segmenti maggiori del semicerchio, e insegna come calcolare il diametro e trovare così il segmento complementare. Dà come esempio un segmento con base 14 e freccia 14, e trova che la freccia del complemento sarà $3\frac{1}{2}$, cioè $\frac{1}{4}$ della base. Nondimeno l'area del complemento viene trovata tramite la formula del capitolo 31, come se né l'avviso di 31A, né il capitolo 32 fossero intervenuti[4].

Anche questa, in qualche modo, è dunque un'interpolazione; si potrebbe persino pensare a un scolio così lungo che è stato scritto su due pagine consecutive, e per questo inserito in due luoghi differenti. Tuttavia, la presentazione del capitolo 27 sembra mostrare che l'autore dei preliminari (e, per conseguenza, di 31A+32) li vedeva come parte del testo; in più, il riferimento a Archimede somiglia a tal punto a quelli fatti in I.26 (dove non c'è il sospetto che si tratti di un'interpolazione)[5] che i due passi devono esser stati scritti dalla stessa mano. Poiché questa mano sembra essere la più competente fra quelle che hanno lasciato le loro tracce nei *Metrica*, deve essere la mano di Erone stesso.

Deve essere della stessa mano anche *l'insieme* dei passi I.27-29, 31A-32, poiché privo delle incoerenze che caratterizzano 1.6A-8. L'immagine che emerge è dunque quella di un Erone che, per *Metrica* I, usa materiali già scritti senza farsi troppi scrupoli sulla coerenza globale del testo che produce; ovviamente materiali che vengono dalla tradizione pratica e non dalla teoria geometrica. Per quanto riguarda l'area e la periferia del cerchio, Erone vede che le tradizioni sono o sbagliate ($\pi = 3$) o danno valori uguali a quelli che lui stesso deriva da Archimede ("il triplo, e la settima parte in più")[6]. Quando viene ai segmenti circolari, non vuole abbandonare le formule tradizionali, forse perché gli danno l'occasione di esibire la sua acu-

[4] È vero che l'errore relativo, di circa il 4% per quanto riguarda il complemento, è molto meno importante relativamente all'area richiesta, cioè all'area del segmento maggiore (circa 0,7%). Questa però è una riflessione che non appartiene all'orizzonte dei *Metrica*; se non viene spiegata, è certo che l'autore del passo non ci ha pensato.

[5] I.26 contiene formule per l'area e la periferia del cerchio, e soltanto formule che vengono derivate dalle opere di Archimede.

[6] Che le tradizioni pratiche avessero già adottato i risultati di Archimede ben prima del tempo di Erone ce lo spiega Erone stesso in I.31 con il suo riferimento a quegli anonimi che assumevano che la periferia fosse "il triplo del diametro, e la settima parte in più"; il groviglio di formule pratiche che ne discendeva costituisce il capitolo 17 del conglomerato che Heiberg [1912] ha pubblicato sotto il nome di *Geometrica*.

tezza mediante la spiegazione della loro origine, ma anche perché quello che offre nel capitolo 32 è un supplemento e non un'alternativa: per il semicerchio, persino la formula degli "antichi" è molto più precisa dell'approssimazione parabolica.

Nel caso dei triangoli, il materiale tradizionale è del tutto valido; non c'è dunque nessuna ragione di eliminarlo, anche perché è ben più intuitivo della formula introdotta nel capitolo 8[7]. Questa viene dunque inserita dopo I.5-6.

Sembra tuttavia che Erone non abbia inserito tutto il passo 1.6A-8. Se I.27-29, 31A-32 può servire di modello, è probabile che l'interpolazione originale abbia incorporato 6A, la dimostrazione derivata dalla *Dioptra* (o da una sua fonte immediata) senza omogeneizzazione stilistica, insieme al lemma I.7 che forse è intuitivo (e dunque accettabile nel contesto della *Dioptra*) ma difficile a difendere all'interno del quadro metamatematico della geometria teorica – quadro che Erone si sforza di rispettare nei *Metrica*. Il primo esempio numerico può essere un'interpolazione secondaria, introdotta da un redattore come introduzione allettante a una dimostrazione la cui complessità molti studenti hanno indubbiamente trovato ripugnante[8].

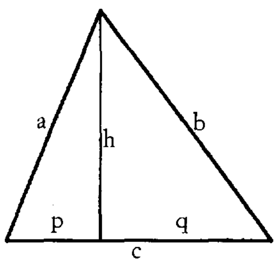


Figura 1.

Che sia legittimo usare I.27-29,31A-32 come modello viene suggerito da un analisi del passo I.4-6. Come già indicato, 1.5-6 danno l'area di triangoli acutangoli e ottusangoli mediante il calcolo della proiezione di un lato sulla base (o sulla sua estensione), determinata tramite *Elementi* II.13 e II.12. Nel caso acutangolo (vedi figura) si ha

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

[7] Riguardo alla caratterizzazione del materiale di I.5-6 come "tradizionale", vedi sotto.

[8] Questa ipotesi ha come conseguenza che non sarebbe Erone a spiegare il metodo per approssimare una radice irrazionale ma un anonimo redattore, poiché questo insegnamento è legato al primo esempio numerico, scelto senza la cura usuale di produrre soluzioni intere o almeno razionali.

Calcoli analoghi si ritrovano in tanti trattati di geometria pratica del medioevo (in primo luogo in quelli arabi, v. Høyrup 1997). In questi, la proiezione interna viene quasi sempre determinata per via di formule equivalenti a quella derivata da Elementi II.13, ma differenti da essa:

$$q = \frac{c}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2c}, \quad p = \frac{c}{2} - \frac{b^2 - a^2}{2c}.$$

L'argomento dietro queste formule sembra essere di tipo "geometrico-algebrico". Dapprima si vede che

$$\square(b) - \square(a) = [\square(q) + \square(h)] - [\square(p) + \square(h)] = \square(q) - \square(p).$$

Ma, come viene spiegato nel trattato di ibn Thabāt [ed. Rebstock 1993: 119] (cfr *Metrica* I.26), $\square(q) - \square(p)$ è anche l'orlo contenuto fra i due quadrati. La cui lunghezza "media" è $\frac{4p+4q}{2}$ $(= 2c)$ e la cui larghezza è $\frac{q-p}{2}$; dunque

$$\square(q) - \square(p) = \square\left(\frac{q-p}{2}, 2(q+p)\right) = \square\left(\frac{q-p}{2}, 2c\right).$$

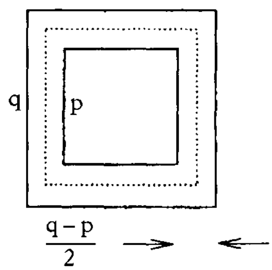


Figura 2.

Spesso nei trattati medioevali, la formula "euclidea" viene offerta come alternativa[9].

Nel caso ottusangolo, la formula invece è sempre quella derivata da *Elementi* II.12. La sola spiegazione coerente di questa distribuzione particolare

[9] Certi trattati danno persino un seconda alternativa, che presuppone *Elementi* II.6 o un'idea equivalente. Ma questa complicazione non cambia le conclusioni generali che possiamo trarre dalla distribuzione delle formule "euclidea" e "geometrico-algebrica".

sembra essere che la tradizione pratica avesse già trovato il metodo "geometrico-algebrico" per determinare l'altezza di un triangolo scaleno prima dell'intervento dei teorici greci, ma che l'avesse usato solamente per determinare le altezze interne (scelta molto ragionevole per minimizzare l'effetto degli errori di misura). I teorici greci hanno generalizzato la nozione di altezza (cioè la perpendicolare dal vertice sul lato opposto *o sulla sua estensione*) ed hanno riformulato anche il risultato già conosciuto per collegarlo al teorema di Pitagora (senza cambiare l'essenza della dimostrazione). Nel seguito, la tradizione pratica ha adottato l'innovazione inventata dalla geometria teorica, cioè il calcolo di una proiezione esterna (come ha adottato il π archimedeo).

Su questo sfondo, diventa interessante il passo *Metrica* I.4-6. I capitoli 5 e 6 trovano le proiezioni interna ed esterna di un lato sulla base, e derivano di esse le altezze e le aree dei triangoli; in questo senso il loro materiale è tradizionale. Ma ambedue i calcoli utilizzano le formule euclidee; anche se non sappiamo in quale momento la formula euclidea per la proiezione esterna sia stata adottata dalla tradizione pratica, il suo uso per la proiezione interna lascia poco dubbio che Erone abbia ritoccato i dettagli del trattato di geometria pratica che gli era servito di ispirazione.

Non tocca la sua struttura, è vero; questa è la ragione per cui I.6a-8 e I.27-29,31A-32 assomigliano ad interpolazioni (e in un certo senso lo sono). Ma anche in questo caso egli introduce un preliminare. Infatti I.4 insegna come distinguere se la perpendicolare cade dentro o fuori del triangolo. Esso presuppone come già noto che se l'angolo A è acuto, sarà $\square(\mathrm{B\Gamma}) < \square(\mathrm{BA}) + \square(\mathrm{A\Gamma})$; se è retto, sarà $\square(\mathrm{B\Gamma}) = \square(\mathrm{BA}) + \square(\mathrm{A\Gamma})$; e infine se è ottuso, sarà $\square(\mathrm{B\Gamma}) > \square(\mathrm{BA}) + \square(\mathrm{A\Gamma})$; per dimostrare che l'implicazione può essere invertita, ricorre ad una doppia riduzione all'assurdo. Questo, di certo, è il prodotto di un autore con un'educazione teorica; non è immaginabile che la tradizione pratica si sia curata di una tale sottigliezza logica, e nemmeno che abbia fatto ricorso a questo tipo di dimostrazione. Dato che la struttura di tutto il passo I.4-6 coincide con quelle viste nelle interpolazioni, è ragionevole assumere che l'autore di tutti e tre passi sia lo stesso, cioè Erone.

Possiamo dunque aggiungere qualche sfumatura all'immagine di Erone autore di *Metrica* I: egli si serve di un modello, un manuale esistente di geometria pratica, e lo segue capitolo per capitolo[10]. Quando gli conviene, però, sostituisce un contenuto insoddisfacente dal punto di vista teorico (o semplicemente rispetto alle abitudini della geometria teorica) con un altro

[10] È possibile, e anche probabile, che abbia cambiato l'ordine dei temi generali [v. Høyrup 1997]. Per esempio, i manuali di geometria pratica trattano di solito i trapezi ed i quadrangoli irregolari prima dei triangoli; Erone, con la sua educazione euclidea, dà la precedenza ai triangoli.

più soddisfacente (per esempio nel capitolo 26, le formule per l'area e la periferia del cerchio, e nel capitolo I.5, la proeizione interna); inserisce anche preliminari di carattere teorico o metateorico (per esempio il capitolo 4).

In questa struttura "di base" inserisce poi anche risultati che non hanno un *pendant* nel modello (I.6A,8, I.26A,32); anche questi, se ragioni didattiche o metateoriche lo suggeriscono, provvede di lemmi preliminari (I.7, I.27-29). Lo fa però senza prendersi cura della coerenza globale del suo testo. Questo produce il fenomeno singolare di "interpolazioni d'autore", fatte cioè dall'autore stesso, ma nondimeno interpolazioni rispetto alla coerenza del testo.

Non sappiamo nulla sulla persona di Erone, se non che ha lavorato ad Alessandria intorno all'anno 62. Non conosciamo dunque niente sulla genesi dei *Metrica*, né sul testo che l'autore aveva presente, né infine sull'uso che faceva del suo proprio testo. E più che possibile che abbia prodotto una prima versione senza interpolazioni, e che queste siano state inserite in un secondo tempo, quando è ritornato al testo. È infatti difficile spiegare senza una tale supposizione le parole dei capitoli 9 e 33, che si riferiscono al testo che precede le interpolazioni come se esso fosse immediatamente precedente. In questo caso le interpolazioni diventano tali anche nel senso consueto, e non solamente rispetto alla logica globale del testo.

Una nota platonica.

Nella *Repubblica* di Platone c'è un passo, molto citato nell'ambito della discussione sulla visione platonica della matematica (525D-526A) [ed. Shorey 1930: 162-164]. In esso Socrate spiega l'importanza di capire la natura dell'unità (*τὸ ἕν*) e il ruolo dell'aritmetica per inculcare questa saggezza.

Il contrasto con questa dottrina dei "numeri stessi", dottrina che "spinge l'anima verso l'alto", viene rappresentato dal calcolo volgare che taglia (*κερματίζω*) l'unità in molte parti (*πολλὰ μόρια*).

Τὸ ἕν non è la *μονάς* di Erone (e di Euclide), e le *μόρια* di Platone non sono *μοιραι*. Non è escluso che Platone pensi all'uso di frazioni e alla suddivisione delle unità metrologiche e monetarie. Ma la correzione a cui sottomette Erone il suo proprio testo quando lo trasferisce dal trattato "meccanico" – la *Dioptra* – a quello con pretese matematiche, cambiando *μοῖραι* in *μονάδες*, suggerisce che nel pensiero di Platone ci possa essere invece (o anche) altra cosa: l'uso di parte aliquote nel calcolo volgare per la distribuzione dei guadagni e dei costi, irremediabilmente intrecciato con questa "giustizia aritmetica" sempre rigettata dai filosofi antichi. Erone almeno sembra sospettarlo.

Bibliografia

HEIBERG, J. L. (ed.), 1912. *Heronis* Definitiones *cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur* Geometrica, in *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. IV. Leipzig, Teubner.

HØYRUP. JENS, 1997. *Hero, Ps.-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An investigation of* Metrica, Geometrica, *and other Treatises*. Pp. 67-93 *in* Klaus Döring, Bernhard Herzhoff & Georg Wöhrle (eds), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*, vol. 7 Trier, Wissenschftlicher Verlag Trier.

REBSTOCK, ULRICH (ed., trad.), 1993. *Die Reichtümer der Rechner (Ġunyat al-Ḣussāb) von Ahmad b. Tabāt (gest. 631/1234). Die Araber–Vorläufer der Rechenkunst*. Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte des Orients, 32. Walldorf-Hessen, Verlag für Orientkunde Dr. H. Vorndran.

SCHÖNE, HERMANN (ed., trad.), 1903. *Herons von Alexandria* Vermessungslehre *und* Dioptra. Griechisch und Deutsch, in *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. III. Leipzig, Teubner.

SHOREY, PAUL (ed., trad.), 1930. *Plato, The Republic.* With an English Translation. 2 vol. Loeb Classical Library 237, 276. London, Heinemann e Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1930, 1935.

UNGURU, SABETAI, & DAVID E. ROWE, 1981. *Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of "Geometric Algebra", "Application of Areas", and Related Problems.* I: Libertas Mathematica 1 (1981), 1-49; II:2 (1982), 1-62.

Pervenuto in redazione il 15 ottobre 1996.

Concerning the position of "Hero's formula"
in the *Metrica* (with a Platonic note)
English translation (October 2011) of
"Sulla posizione della «formula di Erone»
nei *Metrica* (con una nota platonica)".
Bollettino di Storia delle Scienze
***Matematiche* 17 (1997), 3–11**

Jens Høyrup

In memoriam
Olaf Schmidt

"Hero's formula" for the area of a triangle is explained twice in the *Opera omnia*: in *Metrica* I.7–8, and in *Dioptra* 31 [ed. Schöne 1903: 16–24, 280–284]. In his times, Hultsch had doubts about the authenticity of the second version – doubts which, however, seem unfounded, as Schöne [1903: xix*f*] has shown. No deep analysis is needed, on the other hand, to discover that the former version has a distorted relation with the passages that surround it in the text.

Chapters 5 and 6 of *Metrica* I deal with scalene triangles, Chapter 5 with acute-angled, Chapter 6 with obtuse-angled triangles. They proceed by finding first the projection of a side on the base (using *Elements* II.13 and II.12, respectively), and next the corresponding height by means of the Pythagorean theorem. In the end of Chapter 6 (in a passage which we may designate 6A) it is stated that so far the results have been found by means of computation (ἐπιλογίζομαι), while in the following they will be obtained by means of analysis (κατὰ ἀνάλυσιν). After this first preamble to the formula follows in Chapter 7 the lemma that the "side" (the square root) of the product of the squares on the segments AB and BΓ equals the rectangle contained by these same segments – in symbols,

$$\sqrt{\square(\mathrm{AB})\cdot\square(\mathrm{B\Gamma})} \;=\; ⊏⊐(\mathrm{AB,B\Gamma})$$ [1]

[1] The texts speaks of AB and BΓ as *numbers*, but much in the vocabulary remains geometrical, just as do of course the geometric entities that appear in the formula. It may be generally true that the Greek mathematicians distinguished precisely between numbers and segments, for which reason an arithmetico-algebraic reading of for instance Apollonios is illicit, as maintained with emphasis by Unguru & Rowe [1981]; even Hero knows that this distinction should be respected, which is probably the reason that he speaks of AB

The proof makes use of the proportion technique, proving that $AB{:}B\Gamma$ is equal to $\square(AB){:}\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma)$ as well as to $\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma){:}\square(B\Gamma)$, and that $\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma)$ is thus the mean proportional between $\square(AB)$ and $\square(B\Gamma)$. Therefore, $\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma)\cdot\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma) = \square(AB)\cdot\square(B\Gamma)$, whence $\sqsubset\!\sqsupset(AB\Gamma) = \sqrt{\{\square(AB)\cdot\square(B\Gamma)\}}$.

Chapter 8 begins with a second preamble, “There is, however, when the three sides are given, a general method to find the area of an arbitrary triangle without the perpendicular”.[2] A numerical example follows, with sides 7, 8 and 9 units (and area thus $\sqrt{720}$, the reduction of which with arbitrary precision is taught), and then a geometric proof, which begins with a third preamble:

> The geometric demonstration of this is the following: when the sides of a triangle are given, to find the area. It is certainly possible to find the area of the triangle if a perpendicular is drawn and its magnitude has been provided, but what is needed is to provide the area without the perpendicular.

Chapter 8 closes with another numerical example, this time with sides 13, 14 and 15 units – and the first sentence of Chapter 9 says that “after we have thus learned to find the area of a triangle with given sides when the perpendicular is rational”, we shall find it in the case the perpendicular is irrational. It thus goes on from the precise point where Chapter 6 proper closes, as if neither the “first preamble” 6A, nor Chapters 7 and 8 had been there. The whole passage 6A+7+8 is thus in some way an interpolation. Beyond that, the internal structure of the passage, with three preambles, suggests the we are not confronted with a simple interpolation.

A confrontation with *Dioptra* 30 is informative. It begins like this:

---

and $B\Gamma$ as numbers, even though they *are* segments in the proof that follows. But he does not succeed, neither here nor elsewhere, to maintain the distinction. In III.xx it becomes particularly evident that he does not keep apart arithmetical and geometrical operations: in the calculation he omits a factor 1 (the “distance” between 4 and 5), for which reason he has to add magnitudes of different dimensions. The sharp distinction between geometry and arithmetic in Greek geometry is no consequence of failing understanding of the possibility to express arithmetical operations geometrically; it results from theoretical and philosophical purism. In a context like that of the *Metrica*, this purism becomes too burdensome; Hero, as already the Babylonian scribes, sees the objects of his geometry in the “modern” way, as segments, areas and volumes that can be, and often already *are*, measured.

[2] As those that follow, this translation is mine – though made with an eye to Schöne’s German.

> When the sides of a triangle are given, to find the area. It is certainly possible to find the area of the triangle if a perpendicular is drawn and its magnitude has been provided, but what is needed is to provide the area without the perpendicular.

Even in Greek, the two texts are identical, letter for letter; but what is a third and thus rather misplaced preamble in the *Metrica* is a fully adequate explanation in the *Dioptra*.

The two proofs are also almost identical; compared to the version in the *Dioptra*, that of the *Metrica* adds a few explicative notes; when the order of letters is not alphabetic, it is often inverted (sometimes also when it *is* alphabetic in the *Dioptra*). There is thus no doubt that one of the texts is copied from the other, or that they follow a shared model; the character of the differences indicates that the version in the *Dioptra* is, if not necessarily the original, at least much closer to the original than that of the *Metrica*. This observation fits the conclusion that follows from the introductory passage, a misplaced rudiment in the *Metrica* but functional in the *Dioptra*.

Dioptra 20 closes by a numerical example – the same as in the *Metrica*. Even here it is clear that the passage in the *Metrica* is copied with stylistic emendations, either from the *Dioptra* or from an original to which the *Dioptra* is very close. Among the emendations, one is noteworthy: in the *Dioptra*, the sides are not 13, 14 and 15 *units* (μονάδες) but 13, 14 e 15 *lots* or *shares* (μοῖραι).

No less interesting than the confrontation with *Dioptra* 30 is one with *Metrica* I.27–29, 32. I.27 (which concerns the sum of a continued proportion with ratio 4:1) is presented as a preliminary to the measurement of circular segments; I.28–29, which consider perpendiculars and triangles inscribed in circular segments, are characterized in the same way.

After these preliminaries, Chapter 30 begins as if they had not existed: “It is true that the ancients neglected the measurement of circular segments smaller than a semicircle”, namely, calculating the area as $\frac{(c+f)}{2}\cdot f$ (c being the chord, f the arrow). The author suggests that the formula was due to those who took the perimeter to contain thrice the diameter, since the rule becomes exact for the semicircle if this is presupposed. Chapter 31 goes on, presenting the rule of those who instead had made “more precise investigations”[3] namely $\frac{(c+f)}{2}\cdot f+\frac{1}{14}(\frac{h}{2})^2$. This rule is ascribed to those who assumed the perimeter to be

[3] The contrast to which refers the particle μέν / “it is true that” in Chapter 30 is thus the one between “the ancients” and this group, not between the neglectful formula of the ancients and the Archimedean formula prepared in I.27–29.

"the triple of the diameter, and the seventh part more" – once again because the two rules agree in the case of the semicircle.

In the end of Chapter 31 we find the observation ("31A") that this supposedly more precise rule should not be applied if $c > 3f$, and it is shown to lead to absurd results for segments that are too small. In such cases one must instead use "the following approach" – the one which is taught in Chapter 32.

There it is shown, on the basis of the preliminaries, that the area of a circular segment is larger than $1\frac{1}{3}$ times the area of the triangle with the same base and the same height (that is, as explained with a reference to Archimedes, larger than the corresponding parabolic segment). For circular segments whose chord exceeds thrice the arrow, this limit is recommended as an approximation to the area.

Chapter 33 deals with segments larger than a semicircle, and shows how to calculate the diameter and thus to find the complementary segment. As example it gives a segment with base 14 and arrow 14, and finds the arrow of the complement to be $3\frac{1}{2}$, that is, $\frac{1}{4}$ of the base. None the less, the area of the complement is found by means of the rule given in Chapter 31, as if neither the warning of 31A nor Chapter 32 were there.[4]

Even this is thus somehow an interpolation – one may even think of a scholium which has been written on two consecutive pages, and therefore inserted into the text in two different places. Anyhow, the presentation of Chapter 27 seems to show that the author of the preliminaries (and, in consequence, of 31A+32) saw them as part of the text; moreover, the reference to Archimedes is so similar to the references made in I.26 (where no interpolation is to be expected[5]) that the two passages appear to have been written by the same hand. Since this hand seems to be the most competent among those which have left their traces in the *Metrica*, it should be Hero's own hand.

The same hand must be responsible for the totality of the passages I.27–29,31A–32, since these do not exhibit the incongruities that characterize I.6A–8. The image what emerges is thus that of a Hero who, in *Metrica* I, uses previously written material without worrying too much about the global coherence of the text he produces – obviously material taken from the practical

[4] Admittedly, the error, which is c. 4% for the complement, is much less important relatively to the requested area, that of the major segment (c. 0.7%). This, however, is no consideration within the horizon of the *Metrica*; if it is not explained, we can be sure that the author of the passage has not thought about it.

[5] I.26 contains formulae for the area and the perimeter of the circle, and only formulae derived from Archimedes' works.

tradition, not from that of geometrical theory. As regards the area and the perimeter of the circle, Hero sees that the traditions are either erroneous ($\pi = 3$) or equivalent to what he derives himself from Archimedes ("the triple of the diameter, and the seventh part more").[6]

When dealing with circular segments, he does not want to throw away the traditional rules – perhaps because they offer him an occasion to display his own perspicacity in the discussion of their origin, but also because what he offers in Chapter 32 is a supplement and cannot be an alternative – for a semi-circle, even the rule of "the ancients" is much more precise than the parabolic approximation.

In the case of triangles, the traditional material is fully valid; there is thus no reason to discard it, also because it is much more intuitive than the formula explained in Chapter 8.[7] This formula is therefore inserted after I.5–6.

Is seems, however, that Hero has not inserted the complete passage I.6A–8. If I.27–29,31A–32 can serve as a model, then it is probable that the original interpolation consisted of 6A, the demonstration borrowed from the *Dioptra* (or an immediate source for this work) without stylistic smoothing, together with the lemma I.7, whose contents may be intuitive and thus acceptable without proof within the context of the *Dioptra*, but which is difficult to defend within the metamathematical framework of theoretical geometry – a framework which Hero takes care to respect in the *Metrica*. The first numerical example may be a secondary interpolation, introduced by an editor as an introductory appetizer to a proof whose complexity many students will no doubt have found repulsive.[8]

That it is legitimate to use I.27–29,31A–32 as a model is suggested by an analysis of the passage I.4–6. As stated above, I.5–6 finds the area of right- and obtuse-angled triangles through determination of the projection of a side on the base (or its extension), effectuated by means of *Elements* II.13 and II.12 – in the

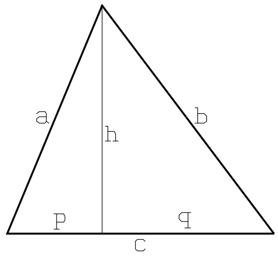
[6] That the practical traditions had already adopted Archimedes's results well before Hero's time is explained by Hero himself in *Metrica* I.31 through his reference to those anonymes who assumed the perimeter to be "the triple of the diameter, and the seventh part more"; the tangle of practical rules derived from that constitutes Chapter 17 of the conglomerate which Heiberg [1912] published as *Geometrica*.

[7] For the characterization of the material of I.5–6 as "traditional", see presently.

[8] This hypothesis has the consequence that the anonymous editor and not Hero is responsible for explaining the method to approximate irrational roots; this explanation is indeed linked to the first numerical example, chosen without the usual care to produce integer or at least rational solutions.

acute-angled case,

$$q = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}/c$$

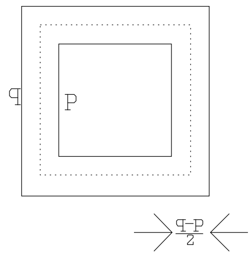


(see the figure). Analogous calculations turn up in many medieval (primarily Arabic) treatises on practical geometry – see [Høyrup 1996]. In these, the internal projections are almost always determined by means of formulae equivalent to but different from *Elements* II.13,

$$q = \frac{c}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}/c\ , \quad p = \frac{c}{2} - \frac{b^2-a^2}{2}/c\ .$$

The argument behind these formulae seems to belong to the genre of "geometric algebra". Initially it is seen that

$$\square(b)-\square(a) = \{\square(q)+\square(h)\}-\{\square(p)+\square(h)\} = \square(q)-\square(p)$$



However, as explained in ibn Thabāt's treatise [ed. Rebstock 1993: 119] (cf. *Metrica* I.26), $\square(q)-\square(p)$ is also the border contained between the two squares, the mean "length" of which is $\frac{4p+4q}{2}$ (= 2c), and whose width is $\frac{q-p}{2}$; in consequence,

$$\square(q)-\square(p) = \sqsubset\!\sqsupset(\frac{q-p}{2},2(q+p)) = \sqsubset\!\sqsupset(\frac{q-p}{2},2c)$$

The medieval treatises often offer the "Euclidean" formula as an alternative.[9]

In the acute-angled case, in contrast, all treatises use the formula derived from *Elements* II.12. The only coherent explanation for this odd distribution seems to be that the practical tradition had already invented the "geometrico-algebraic" way to determine the height of a scalene triangle before the intervention of the Greek theoreticians, but that it had used it only for the determination of internal heights (a very reasonable choice if one wants to minimize the influence of measuring errors). The Greek theoreticians generalized the notion of a height, to encompass the perpendicular from an apex on the opposite side *or its extension*, and also reformulated the already known result about internal heights so as to connect it to the Pythagorean theorem (without changing the essence of the

[9] Certain treatises even give a second alternative, which presupposes *Elements* II.6 or an equivalent idea. However, this intricacy does not change the general conclusions that can be derived from the distribution of the "Euclidean" and the "geometrico-algebraic" formulae.

proof). Subsequently, the practical tradition adopted the new invention of the theoreticians, that is, the determination of the external projection (as it adopted the Archimedean π).

On this background, *Metrica* I.4–6 becomes interesting. Chapters 5 and 6 find the internal and external projections of a side on the base, and derive from them the heights and the areas of the triangles. Both calculations, however, use the Euclidean formulae. Even though we do not know at which moment the Euclidean formula for the external projection was adopted by the practical tradition, the use of the Euclidean formula for the internal projection leaves little doubt that Hero adjusted the details of the treatise of practical geometry which served him as inspiration.

Yet he did not adjust its structure; this is the reason that I.6A–8 and I.27–29,31A–32 look like interpolations (and in a sense *are* interpolations). But even before I.5–6 he introduces a preliminary. Indeed, I.4 teaches how to distinguish whether the perpendicular falls inside or outside the triangle. It presupposes as already known that if the angle A is acute, then $\square(\mathrm{B\Gamma}) < \square(\mathrm{BA})+\square(\mathrm{A\Gamma})$; if it is right, then $\square(\mathrm{B\Gamma}) = \square(\mathrm{BA})+\square(\mathrm{A\Gamma})$; and if it is obtuse, then $\square(\mathrm{B\Gamma}) > \square(\mathrm{BA})+\square(\mathrm{A\Gamma})$; in order to show that the implications can be inverted, he uses a double reduction to the absurd. This is certainly done by a theoretically educated author; it is out of the question that the practical tradition should care about such logical subtleties, and also that it should use this kind of argument. Already the coincidence of the structure of the whole passage I.4–6 with what we have seen in connection with the interpolations makes it reasonable to assume that the author of all three passages is the same – that is, Hero.

We may thus add some shades to the picture of Hero as author of *Metrica* I: He uses a model, an existing manual of practical geometry, and he follows it chapter for chapter.[10] When he finds it suitable, however, he replaces contents which is unsatisfactory from a theoretical point of view (or simply with regard to the habits of theoretical geometry) by something which is more acceptable (for instance, in I.6, the formulae for the area and the perimeter of the circle, and in I.5, the internal projection); he also insert theoretical and metatheoretical preliminaries (for instance, I.4).

[10] It is possible, and even plausible, that he has changed the order of the general themes – see [Høyrup 1996]. For instance, manuals of practical geometry normally deal with trapezia and irregular quadrangles before triangles; Hero, with his Euclidean upbringing, gives priority to the triangles.

Within this basic structure he also inserts results that have no counterpart in the model (I.6A,8, I.26A,32); even these he provides with preliminary lemmas if it seems adequate for didactical or metatheoretical reasons (I.7, I.27–29). But he does so without worrying about the global coherence of the text he produces. This creates the singular phenomenon of "author's interpolations", made by the author in person but none the less interpolations with regard to the coherence of the text.

We know nothing about Hero as a person, except that he worked in Alexandria around 62 CE.[11] We thus know nothing about the production of the *Metrica*, nor about their intended or actual use by the author. It is quite possible that he made a first version without the interpolations, and inserted them when returning to the text at a later moment. It is indeed difficult to explain without this presupposition the words of Chapters 9 and 33, which refer to that which precedes the interpolations as if it was immediately preceding. In this case the interpolations become interpolations even in the usual sense, and not only with respect to the overall logic of the text.

A Platonic Note

In Plato's *Republic* there is a passage which is rather famous in discussions about Plato's view of mathematics (525D–526A) [ed. Shorey 1930: 162–164]. Here, Socrates explains the importance of understanding the nature of the unity (τὸ ἕν) and the role of arithmetic in conveying this insight. The contrast to this doctrine of "numbers in themselves", a doctrine which "directs the soul upward", is presented by vulgar computation, which cuts up (κερματίζω) the unit in many parts (πολλὰ μόρια).

Tὸ ἕν is *not* the μονάς of Hero (not that of Euclid), and Plato's μόρια are not μοῖραι. It is not to be excluded that Plato thinks of the use of fractions and of the subdivision of metrological and monetary units. But Hero's correction of his own text when he transfers it from a "mechanical" treatise – the *Dioptra* – to one with mathematical pretensions, changing μοῖραι into μονάδες, suggests that Plato might instead (or also) have thought of something else: the use of shares in the vulgar computation of profits an costs, hopelessly embroiled in that "arithmetical justice" which the ancient philosophers always rejected. Hero at least seems to suspect as much.

[[11] Added in the translation: even this date is now subject to doubt, see F. Acerbi, "Hero of Alexandria", pp. 283*f in New Dictionary of Scientific Biography*. Detroit: Scribner, 2008.]

Bibliography

Heiberg, J. L. (ed.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Høyrup, Jens, 1996. «Hero, pseudo-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An investigation of *Metrica*, *Geometrica*, and other Treatises». *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række: *Preprints og Reprints* 1996 nr. 5. [Now to be replaced by Jens, "Hero, Ps.-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An Investigation of *Metrica*, *Geometrica*, and other Treatises", pp. 67–93 *in* Klaus Döring, Bernhard Herzhoff & Georg Wöhrle (eds), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*, Band 7. Trier: Wissenschaftlicher Verlag Trier, 1997. (For obscure reasons, the publisher has changed □ into ~ and ▭▭ into ¤§ on p. 83 after having supplied correct proof sheets).]

Rebstock, Ulrich (ed., trad.), 1993. *Die Reichtümer der Rechner (Ġunyat al-Ḥussāb) von Aḥmad b. Ṯabāt (gest. 631/1234). Die Araber – Vorläufer der Rechenkunst*. (Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte des Orients, 32). Walldorf-Hessen: Verlag für Orientkunde Dr. H. Vorndran.

Schöne, Hermann (ed., trad.), 1903. Herons von Alexandria *Vermessungslehre* und *Dioptra*. Griechisch und deutsch. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, vol. III). Leipzig: Teubner.

Shorey, Paul (ed., trad.), 1930. Plato, *The Republic*. With an English Translation. 2 vol. (Loeb Classical Library 237, 276). London: Heinemann / Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1930, 1935.

Unguru, Sabetai, & David E. Rowe, 1981. «Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of "Geometric Algebra", "Application of Areas", and Related Problems». I: *Libertas Mathematica* **1** (1981), 1–49; II: **2** (1982), 1–62.